Faktorenanalyse: Matrixalgebraisch (Einstiegsthema VD)

Ich möchte mit der Faktorenanalyse beginnen und dabei wie folgt vorgehen:

- ➔ Annahmen Thurstone und sein bilineares Modell
- ➔ Matrixalgebraische Darstellung
- ➔ Umformungen um zu Hotelling zu kommen und ggf. Hotelling selber

Thurstone (1931) beschäftigte sich viel mit der Intelligenzforschung und machte folgende Annahmen:

- ➔ verschiedene Fähigkeiten zeigen sich in der Leistung bei der Bearbeitung von Aufgaben
- ➔ diese Fähigkeiten stehen gleichberechtigt nebeneinander
  - o sie sind also unabhängig voneinander
  - o orthogonal
- ➔ niemals sind alle Fähigkeiten gleichzeitig bei der Bearbeitung eines Items beteiligt

Daraus ergibt sich sein bilineares Modell:

- Multiplikative Verknüpfung: Der Beitrag eines Faktors wird Null, wenn die Vpn in diesem Faktor keine Merkmalsausprägung aufweist oder wenn das Item diesen Faktor (diese Merkmalsausprägung) nicht misst
- Additive Verknüpfung: Fehlende Beträge der Faktoren können kompensiert werden (wenn man also beim IQ-Test schlecht in Logik ist, aber gut bei mentalen Rotationen => kompensiert)
- Bilinearität: Das Modell ist bilinear, weil man 2 Komponenten (p + f) miteinander verknüpft (additiv und multipl.)

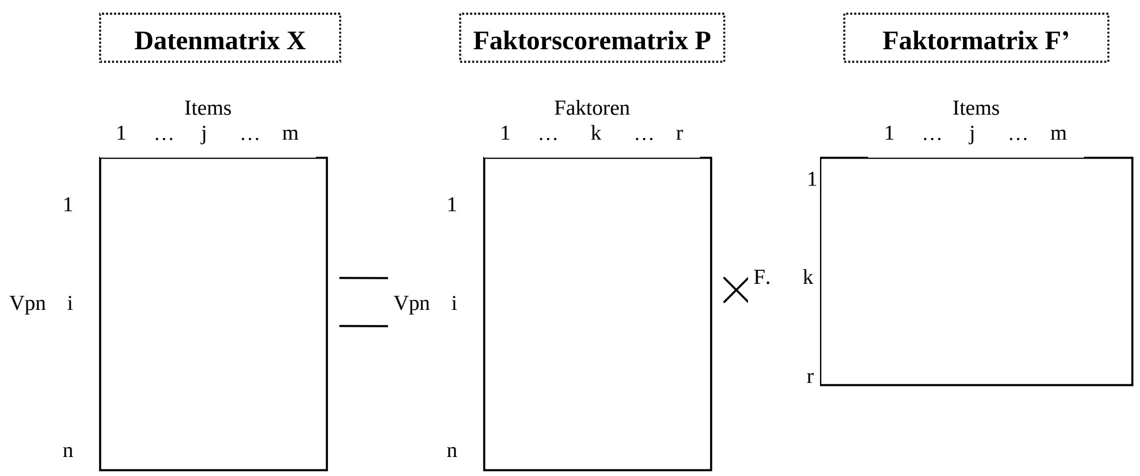
$$x_{ij} = \underbrace{p_{i1} * f_{1j}}_{\text{1. Faktor}} + \underbrace{p_{i2} * f_{2j}}_{\text{2. Faktor}} + \dots + \underbrace{p_{ik} * f_{kj}}_{\text{k-ter Faktor}} + \dots + \underbrace{p_{ir} * f_{jr}}_{\text{r-ter Faktor}}$$

Leistung der Vp i in Item j = Skalarprodukt: Beitrag des Faktors einer Vp i im Item j

Die Leistung einer Vpn i in Item j setzt sich zusammen aus

- ➔ dem Begabungsprofil p_{ik} der Vpn über r Fähigkeiten (= Faktoren)
- ➔ und jedes Item habe ein Anforderungsprofil f_{kj} über diese Fähigkeiten

Matrixalgebraisch kann man das wie folgt darstellen:



X ist also die einzige Bekannte
-> aber sie ist z*-transformiert

⇨ $X'X = R$

Also: $X = P * F'$
$X'X = R$

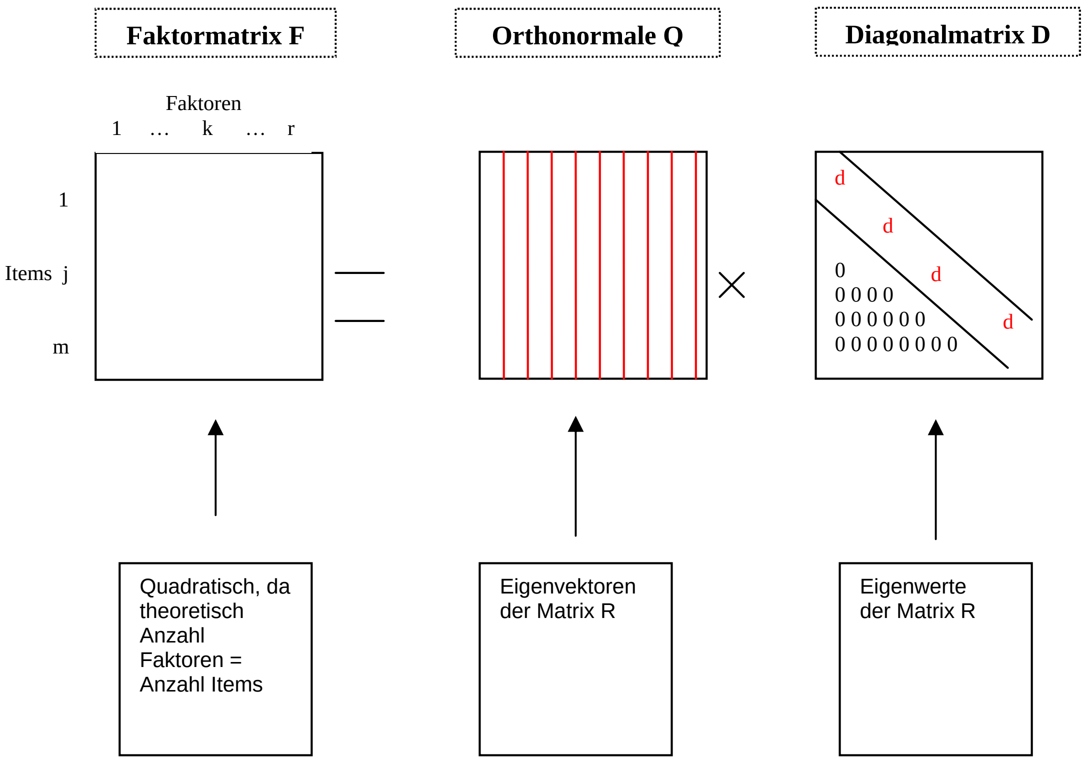
⇨ also
$(P * F')' * (P * F') = R$
$F'' * \underbrace{P' * P} * F' = R$
I, da P spaltenweise orthonormal

$F * F' = R$

Somit nur noch 1 Unbekannte (F)

Allgemeine Matrixalgebraische Regel:
⇨ Jede Matrix kann zerlegt werden in
- o 1 quadratische orthonormale Matrix Q
- o und in 1 Diagonalmatrix D

⇨ also auch F: $F = Q * D$



$$F = Q * D$$

$$R = F * F'$$

$$R = (Q * D) * (Q * D)'$$

$$= Q * \underbrace{D * D'}_{D^2 = \Lambda \text{ (Groß Lambda)}} * Q'$$

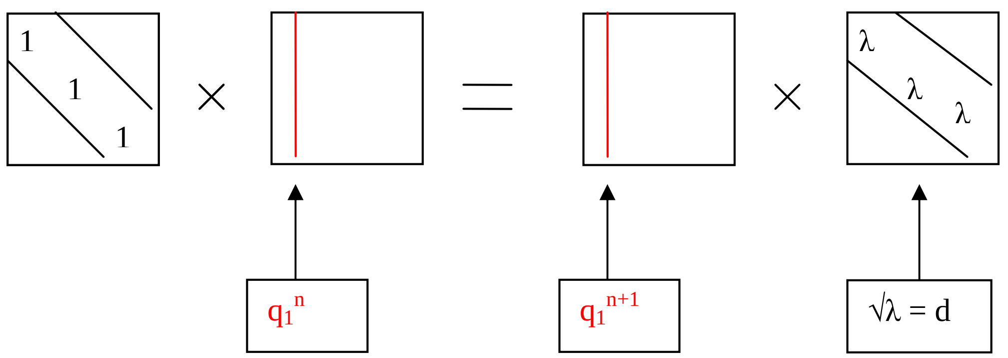
$$= Q * \Lambda * Q' \qquad \text{[mit Q postmultipliziert}$$

$$R * Q = Q * \Lambda * \underbrace{Q' * Q}_{\text{I da Q orthonormal}}$$

$$R * Q = Q * \Lambda$$

⇨ Ansatz von Hotelling (beachte: R immer noch einzige Bekannte!)

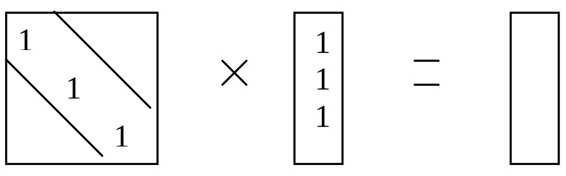
$$R \quad * \quad Q \quad = \quad Q \quad * \quad \Lambda$$



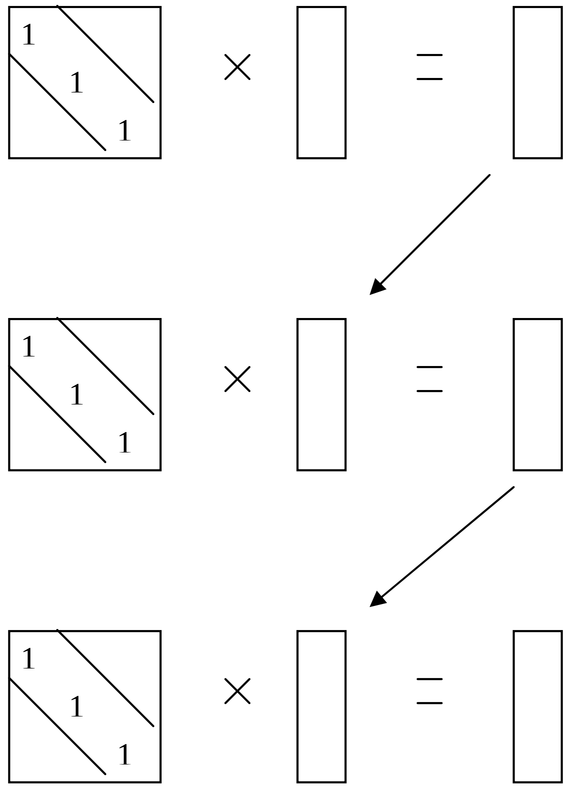
Man nimmt nun aus der Matrix Q die 1. Spalte q_1^n und q_1^{n+1} [beachte: KEIN Exponent, sondern nur Indizierung, um die Spaltenvektoren unterscheiden zu können] und aus der Matrix Λ den ersten Eigenwert λ_1

Die Vektoren q_1^n und q_1^{n+1} sind einander um den 1. Eigenwert λ_1 proportional. Vektoren sind dann proportional, wenn sie die gleiche Länge haben.

Für den Vektor q_1^n nimmt man einen beliebigen Anfangsvektor z.B. nur Einsen.



Der Ergebnisvektor q1n+1 wird für q1n in die Gleichung eingesetzt.



- ⇨ Die Iteration wird solange wiederholt bis sich die Vektoren q_1^n und q_1^{n+1} einander proportional sind.
- ⇨ Der Proportionalitätsfaktor nähert sich dem 1. Eigenwert an!

Nach der Iteration

1.) Berechnung Proportionalitätsfaktor
2.) Der letzte Vektor aus der Iteration und einheitsnormiert und dann der 1. Faktor berechnet