Mengenlehre

2.8) Was ist eine Menge im Sinne der Mengenlehre? Wie hängen Mengenlehre und PL miteinander zusammen? Was besagt das Komprehensionsschema? Wie definiert man eine Menge extensional, wie intensional?

Was ist eine Menge im Sinne der Mengenlehre?

Eine Menge im Sinne der Mengenlehre ist „eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens - welche die Elemente der Menge genannt werden - zu einem Ganzen (Def. nach Cantor 1845 -1918)

Wie hängen Mengenlehre und Prädiktorlogik miteinander zusammen?

In der **PL** ist vor allem der Begriffs**inhalt** maßgebend, hier wird der Aufbau von Sätzen untersucht.
⇨ Um zu den Sätzen der Prädikatenlogik zu gelangen gibt es in der Aussagenlogik zwei Wege: a) den semantischen Weg und b) den syntaktischen Weg. Beim *semantischen Weg* wird mittels des Begriffs der *ω- Belegung* die Menge der Ausdrücke in die Menge { W, F } der Wahrheitswerte abgebildet. Eine ω- Belegung B_w bezieht sich dabei auf eine vorgegebene Individuenmenge ω und stellt eine Abbildung dar, die jeder Subjektvariablen ein Element aus ω und jeder n- stelligen Prädikatenvariablen eine n- stellige Relation in ω zuordnet
In der **Mengenlogik** ist der Begriffs**umfang** maßgebend, hier lassen sich Äußerungen der Aussagenlogik und der PL auf Mengenrelationen übertragen.
➔ Der Zusammenhang wird durch das Abstraktionsschema (das ist die Darstellung des Verfahrens zur Einführung extensionaler Begriffe) deutlich, das sich aus Komprehensionsschema und Extensionalitätsschema zusammensetzt.
Vereinfacht: durch das Komprehensionsschema kommt man vom **Inhalt** aus PL zum **Umfang** in der Mengenlogik.

Was besagt das Komprehensionsschema?

= Klassenbildungsschema:
hier erfolgt die eigentliche Abstraktion, d.h. die begriffliche Zusammenfassung von empirischen Termen zu Klassentermen:
$\cup\beta\cap x\ [x\in\beta\leftrightarrow z(x)]$
Das Abstraktionsschema lässt sich zusammengesetzt denken aus dem *Komprehensionsschema* (auch Klassenbildungsschema) und dem *Extensionalitätsschema*. Die eigentliche Abstraktion, d.h. die begriffliche Zusammenfassung von empirischen Termen zu Klassentermen erfolgt im Komprehensionsschema: $\vee\beta\wedge x\ [x \in \beta \leftrightarrow Z(x)]$
Es gibt wenigstens ein β , das bei allen x gilt: x ist genau dann ein Element von β, wenn von x die Aussage z gilt. Im Komprehensionsschema kommt man also durch begriffliche Zusammenfassung vom Inhalt zum Umfang des Begriffs (z.B. von „Individuum“ x ist ein „Raucher“ zu „ x gehört zur Klasse der Raucher“)

Wie definiert man eine Menge extensional, wie intensional?

• Das **Extensionalitätsschema** legt fest, daß zwei Klassen identisch sind, wenn sie in ihren Elementen übereinstimmen. Danach dürfen zwei Begriffe einander gleichgesetzt werden, wenn sie für die gleichen Individuen gelten, auch wenn sie inhaltlich ganz verschieden sind, d.h. durch verschiedene Komprehensionsschemata definiert wurden (z.B.: Lebewesen mit Herz = Lebewesen mit Nieren):
$\wedge z\ [(z \in \alpha \leftrightarrow z \in \beta) \rightarrow \alpha = \beta]$
Immer dann wenn alle Individuen z Elemente der Menge α und Element der Menge β sind, impliziert das, daß α = β ist.
Alle wissenschaftlichen theoretischen Sprachen sind vorwiegend extensional (abstrakt, extensiv, umfangslogisch).
Extensional definierte Menge:
Bsp.: A = {1, 2, 3, 4}
Bsp.: alle Tücher, die auf dem Fensterbrett liegen.
→ nur auf Raum und Zeit einer Menge eines Objektes wird hier verwiesen.

• Eine Menge ist **intentional** definiert, wenn die Merkmale benannt werden, die alle Elemente haben, die zu dieser Menge gehören.
Schreibweise: $A=\{ x \mid x \in N \wedge x < n \}$ (Elemente der Menge definiert).
Beispiel: „Klasse der Raucher“ = Alle Leute, die Zigaretten oder Zigarren oder Pfeife rauchen.

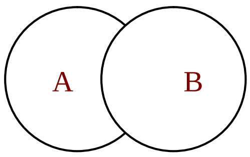
Zu den Begriffen „ intensional“ und „extensional“: Alle wissenschaftlichen theoretischen Sprachen sind vorwiegend *extensional* (abstrakt, extensiv, umfangslogisch). Man kann daher die Überführung *intensionaler* (empirischer) Sprachen (z.B. Beobachtungs- und Messsprache) in extensionale Sprache als ersten Schritt zur Konstitution wissenschaftlicher Sprachsysteme ansehen. Das Verfahren zur Einführung extensionaler Begriffe entstammt der Klassenlogik und wird *Abstraktionsverfahren* genannt. Es wird in einem allgemeinen Modell, dem *Abstraktionsschema* dargestellt.

2.9) Was versteht man unter einer Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Differenzmenge, Teilmenge, Komplementärmenge? Was ist eine leere Menge, was eine Allmenge? Was versteht man unter der Mächtigkeit einer Menge, was unter der Potenzmenge? Wie groß ist die Mächtigkeit der Potenzmenge?

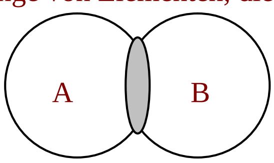
Allgemeines:
Das Zeichen $\in$ wird als „Element von“ gelesen.
Das Zeichen $\notin$ wird als „nicht Element von“ gelesen.
$\wedge$ = und / Konjunktion
$\vee$ = oder / Diskonjunktion
x l = Menge aller x, für die gilt
$\neg$ = nicht

Was versteht man unter einer Vereinigungsmenge, Schnittmenge, Differenzmenge, Teilmenge, Komplementärmenge?

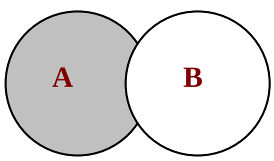
• Unter **Vereinigungsmenge** versteht man die Summe bzw. Vereinigung von Mengen:
Bsp.: $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$
Eine Menge also von Elementen, die **entweder** einer Menge A **oder** einer Menge B angehören.



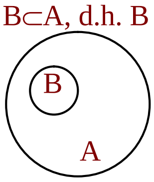
• **Schnittmenge** :
Menge von Elementen, die **sowohl** einer Menge A **als auch** einer Menge B angehören



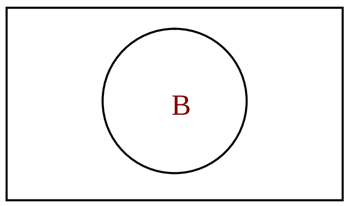
• **Differenzmenge** :
$A - B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\}$
X ist Menge aller a, die nicht b sind, z.B. a = Studierende, b = Brillenträger → x sind alle Studierenden die keine Brille tragen.



• **Teilmenge** :
Menge von Elementen, die in einer anderen Menge enthalten sind.
Bsp.: $B \subset A$, d.h. B ist Teilmenge von A.



• **Komplementärmenge** : $\neg B$
$\neg B = \{x | x \notin B\}$



<u>Was ist eine leere Menge, was eine Allmenge?</u>
• **leere Menge:** $\varnothing$
$\varnothing$ = Menge mit null Elementen
• **Allmenge** :
x = x ; Menge aller Elemente (**Menge in der alles drin ist z.B. Universum)**

<u>Was versteht man unter der Mächtigkeit einer Menge, was unter der Potenzmenge?</u>
• **Mächtigkeit einer Menge: n**
Darunter versteht man die Anzahl der Elemente in ihrer Menge.
Bsp.: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$\Rightarrow n(A) = 4$
$n(\varnothing) = 0$
• **Potenzmenge : p**
Die Menge aller Teilmengen einer Menge M (Allmenge) heißt Potenzmenge der Menge M. Hat M genau n Elemente, so hat ihre Potenzmenge genau 2 hoch n Elemente.
Bsp.: $p(A) = \{x | x \subset A\}$
$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow p(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\}$

<u>Wie groß ist die Mächtigkeit der Potenzmenge?</u>
$n(p(A)) = 2^{n(A)}$
am Beispiel von oben: $\Rightarrow 2^4 = 16$